تأليف

شفيق بك منصور

(يكن)

طبع بالمطبعة المصرية ببولاق

سنة ١٣٠١

ويوجد في المكتبة العمومية بشارع كلوت بك

بالقاهرة

كتب اخرى للمؤلف

تطبيق الرياضيات على علم القوانين (بالفرنساوي)

حساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

مختصر علم الحساب

مختصر علم الهندسة } تحت الطبع

مختصر علم الطبيعة }

(٤) الكمية المركبة هي التي تتركب من أجزاء منفصلة بعضها عن بعض بإحدى العلامات + أو − مثل

ب + ح ء − وٓ

وكل من هذه الأجزاء يسمى حداً أو كمية بسيطة وإذا كانت المركبة ذات حدين تسمى ثنائية وإن كانت ذات ثلاثة حدود تسمى ثلاثية وهلم جرا والحدود التي تتقدمها العلامة + تسمى إيجابية والتي تتقدمها العلامة − تسمى سلبية والتي ليست لها علامة تقدر لها الأولى والحدود المتشابهة هي التي تتشابه حروفها وقواها نحو

٣ حٓ ء − ٤ ح ء − ٩ حٓ ء + ٢ ح ء

ويمكن اختصارها أي ضمها في حد واحد بأن تختصر الحدود المتقدمة بالعلامة + ويطرح المكرر الأصغر من الأكبر ويجعل للباقي علامة الأكبر فنقول في هذا المثال ثلاثة حٓء وأربعة حٓء تحصل ٧ حٓء وهي مختصر الحدين الإيجابيين ثم تختصر الحدين الآخرين تكون − ١٣ حٓ ء فنطرح ٧ من ١٣ فيتحصل ٦ ويكون مختصر الكمية المفروضة هو − ٦ حٓ ء ويتضح من هذا أنه إذا كان في كمية مركبة حدان متشابهان في العلامة فقط فيمكن ضمهما مثل ذلك

٢ ح هـ + ٢ ح − ٦ ح هـ = ٣ حٓ

(٥) يظهر الفصل عن ابتدا على طريق حل هذه المسألة

مائتة ٤٠٠٠٠ فرنك … في السنة

فنقول في حل هذه واحد … ١ فرنك … ٥ فالفرنك يربح ٥/١٠٠ أو ٠٫٠٥ فالفرنكات المربوحة في سنة واحدة ٠٫٠٥ × ٤٠٠٠٠ أي ٢٠٠٠ فرنك وفي سنتين ٤٠٠٠ وهو الجواب

ولكن هذه الطريقة ليست عامة … حل مسائل مثل هذه الآية ذكرا.

(مختصر علم الجبر)

(تعريفات)

(١) علم الجبر تعميم علم الحساب وذلك باستعمال الحروف الهجائية والعلامات أما الحروف فتوضع عوضا عن الكميات وأما العلامات فتدل على العمليات التي يراد اجراؤها على الكميات

والعلامات هي + (زائد) للجمع و − (ناقص) للطرح و × (في) للضرب (وعدم العلامة بين حرفين علامة للضرب أيضا) و ÷ أو — (على) للقسمة و > للاكبر و < للاصغر و = (تعادل) للمساواة . لتكن مثلا الكميات

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ح}\,\text{د} - \frac{\text{ح}}{\text{ه}} = \text{و}$$

فيقرأ ا زائد ب ناقص ح في د ناقص ح على ه تعادل و ومعناه انه اذا أضيف ب الى ا وطرح من المجموع حاصل الضرب ح د ثم طرح من الفاضل خارج القسمة $\frac{\text{ح}}{\text{ه}}$ يفضل باق يعادل و

(٢) مكرر كمية هو عدد يرقم عن يمينها يدل على قدر مرات تكرارها نحو ٣ س فانه يدل على س + س + س وأس كمية هو عدد يرقم عن يسارها مرتفعا عنها يدل على درجة قوتها أي على عدد العوامل المتساوية المضروب بعضها في بعضها مثاله $\text{س}^{٣}$ فانه يدل على س × س × س

جذر كمية هو عدد اذا ترقى الى درجة معلومة حدثت تلك الكمية مثاله ح فانه الجذر الثالث أي التكعيبي للكمية $\text{ح}^{٣}$ وعلامته هكذا $\sqrt{\;}$ فيكتب $\sqrt[٣]{\text{ح}^{٣}} = \text{ح}$ والعدد ٣ الموضوع على العلامة يسمى دليل الجذر

(تنبيه) لا يكتب الدليل في الجذر الثاني أي التربيعي مثاله $\sqrt{\text{ح}^{٢}} = \text{ح}$

مثال آخر

− ح + ح د − ه

٣ ح − ٤ ح د + ٥ ه

٥ ح − ٤ ه

+ ٣ ح د − ٩ ه

---

٧ ح − ٩ ه

(في الطرح)

(٣) في الطرح يلزم تغيير علامات المطروح من + الى − وعكسه ثم يجري العمل كما في الجمع فان قيل اطرح − ح من ب كان الفاضل ب + ح وان قيل اطرح ٣ ح − ٤ د + ه من ٥ ح − ٧ د + ٣ ه فتأخذ العملية هذه الصورة

٥ ح − ٧ د + ٣ ه

− ٣ ح + ٤ د − ه

---

٢ ح − ٣ د + ٢ ه

ولنطرح ٤ ح د − د ه^٢ − ٣ ب و + ٦ و

من ٣ ح د − د ه^٢ − ٣ ب و فنجد

٣ ح د − د ه^٢ − ٣ ب و

− ٤ ح د + د ه^٢ + ٣ ب و − ٦ و

− ح د − ٦ و

(تنبيه) اذا أريد بيان طرح كمية من كمية أخرى بدون اجراء العمل يوضع المركبة بين قوسين هكذا

ا − (ب − ح + د)

فان أريد حذف القوسين يلزم تغيير علامات الكميات المحصورة بينهما فتصير

ا − ب + ح − د

كل ما قلناه بخلاف ما اذا استعملنا الحروف ورمزنا بالحرف م مثلا لرأس المال وبالحرف س لسعره وبالحرف ج للاجل ثم قلنا حيث ان ١٠٠ فرنك تربح س فالفرنك يربح س/١٠٠ و م فرنكات تربح فى السنة س م/١٠٠ وفى المدة ج تربح س م ج/١٠٠ فانت ترى ان كل مسئلة من هذا النوع تحل بضرب رأس المال فى سعره وفى الاجل ثم بقسمة الحاصل على ١٠٠ ليكن مثلا المطلوب فائدة ١٥٠٠ فرنك فى ٤ سنوات على حسب المئة ٣ فنجعل فى النتيجة السابقة م = ١٥٠٠ و س = ٣ و ج = ٤ فنجد حالا (١٥٠٠ × ٣ × ٤)/١٠٠ أى ١٨٠ فرنكا وهو الجواب

(تنبيه) كل عبارة جبرية تستعمل لحل مسائل من نوع واحد تسمى قانونا

(الباب الاول)

(فى الجمع)

(١) تجمع الكميات الجبرية بكتابتها متتالية مع علاماتها مثلا ان قيل اجمع الكمية ب والكمية − ج والكمية د كان المجموع

ب − ج + د

واذا كانت الكميات بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة فتكتب المتشابهة بعضها تحت بعض ثم تختصر ومثال ذلك ان قيل اجمع ٢ ب ج^{2} − ٤ ب د + ٩ ب هـ و ب ج^{2} + ٣ ب د − ٩ ب هـ و ٥ ب هـ − ٣ ب ج^{2} فتجرى العمل هكذا

٢ ب ج^{2} − ٤ ب د + ٩ ب هـ

ب ج^{2} + ٣ ب د − ٩ ب هـ

− ٤ ب ج^{2} + ٥ ب هـ

− ب ج^{2} − ب د + ٥ ب هـ

اطرح $س^{٤} - ٤ س^{٣} ص - ٦ س^{٢} ص^{٢} - ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$

من $س^{٤} + ٤ س^{٣} ص - ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$

$س^{٤} + ٤ س^{٣} ص - ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$

$- س^{٤} + ٤ س^{٣} ص - ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} - ص^{٤}$

$٨ س^{٣} ص + ٨ س ص^{٣}$

(الباب الثاني)

(في الضرب)

(١) الضرب كمية بسيطة في أخرى يلزم اعتبار أربع قواعد (أولها) قاعدة المكررات وهي ان تضرب المكرر في المكرر وتجعل الحاصل مكرر الحاصل المطلوب (ثانيها) قاعدة الحروف وهي ان تكتب كل الحروف في الحاصل بدون تكرار (ثالثها) قاعدة الاس وهي ان تجمع أسس الحروف المتشابهة (رابعها) قاعدة العلامات وهي ان كان العاملان متحدي العلامة فالحاصل يكون ايجابيا وان كان مختلفي العلامة يكون الحاصل سلبيا وبعبارة أخرى

+ مضروب في + أو − مضروب في − يحصل +

+ مضروب في − أو − مضروب في + يحصل −

مثال ذلك ان قيل اضرب $٣ حـ^{٢} د^{٤}$ في $٢ حـ د^{٥}$ فيكون الحاصل $٦ حـ^{٣} د^{٩}$ لانه يمكن تحليل العاملين المذكورين هكذا ٣ حـ حـ د د د د × ٢ حـ د د د د د أو هكذا ٣ × ٢ حـ حـ حـ د د د د د د د د د أعني $٦ حـ^{٣} د^{٩}$

(٢) والضرب كمية مركبة في أخرى يلزم أولا ترتيبهما بالنسبة الى حرف واحد أعني بحيث ان أسس هذا الحرف في العاملين تكون آخذة في التصاعد أو في التنازل في آن واحد ثم يضرب حسب القواعد السابقة كل حد من المضروب

(تمرين ثان)

(في الجمع)

(١)

ح^{3} + ٣ ح^{2} د + ٣ ح د^{2} + د^{3}

ح^{3} − ٣ ح^{2} د + ٣ ح د^{2} − د^{3}

---

٢ ح^{3} + ٦ ح د^{2}

(٢)

− ٢ ح − ٢ د − ٢ ه

٩ ح + ٢ د − ٢ و

− ٦ ح + ٣ د + ٥ ه + ٦ و

ح + ٣ د + ٣ ه + ٤ ز

(٣)

− ٢ ح + ٣ د − ٥ ه + ٨ ز

٣ ح − ٥ د + ٦ ه − ٩ و

− ٥ ح + ٨ د − ٩ ه + ١٢ و

٦ ح − ٩ د + ١١ ه − ١٣ ز

---

٢ ح − ٣ د + ٣ ه − ٢ و

(في الطرح)

اطرح ١٠ ح − ٧ د + ٥ ه من ٦ ح − ٤ د

٦ ح − ٤ د

− ١٠ ح + ٧ د − ٥ ه

− ٤ ح + ٣ د − ٥ ه

اطرح ٥ ح د − ٤ ه و + ٣ د^{2} + ٣ ح^{2} من ٤ ح د − ه و − ٢ د^{2} + ٣ ح^{2}

٤ ح د − ه و − ٢ د^{2} + ٣ ح^{2}

− ٥ ح د + ٤ ه و − ٣ د^{2} − ٣ ح^{2}

− ح د + ٣ ه و − ٥ د^{2}

اطرح

$$\text{أ} + \text{ب}$$
$$\text{أ} + \text{ب}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} + \text{أ}\,\text{ب}}$$
$$\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^{2}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} + ٢\,\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^{2}}$$

يعني ان تربيع مجموع كميتين يعادل تربيع الحد الاول + مضاعف حاصل ضربهما + مربع الحد الثاني واذا ضربنا أ − ب في نفسه نجد

$$\text{أ} - \text{ب}$$
$$\text{أ} - \text{ب}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} - \text{أ}\,\text{ب}}$$
$$- \text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^{2}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} - ٢\,\text{أ}\,\text{ب} + \text{ب}^{2}}$$

يعني تربيع فاضل كميتين يعادل تربيع الحد الاول − مضاعف حاصل ضربهما + تربيع الحد الثاني

(حاصل ضرب مجموع كميتين في فاضلهما)

(٥) اذا ضربنا أ + ب في أ − ب نجد

$$\text{أ} + \text{ب}$$
$$\text{أ} - \text{ب}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} + \text{أ}\,\text{ب}}$$
$$- \text{أ}\,\text{ب} - \text{ب}^{2}$$
$$\overline{\text{أ}^{2} \qquad - \text{ب}^{2}}$$

مبتدأ من اليمين في كل حد من المضروب فيه ويوضع الحد الاول من كل حاصل جزئي على محاذاة الحد الذي ضرب فيه ثم تجمع الحواصل الجزئية باختصار الحدود المتشابهة ان وجدت فما كان هو الجواب مثال ذلك ان تقول

اضرب $٥ح^{٣} - ٣حد^{٢} + ٧ح^{٢}د$

في $٥د^{٣} - ٤حد^{٢} + ٣ح^{٢}د$

فترتب العاملين بالنسبة الى أسس ح التنازلية مثلا ثم تجرى الضرب فيأخذ العمل هذه الصورة

$$٥ح^{٣} + ٧ح^{٢}د - ٣حد^{٢}$$

$$٣ح^{٢}د - ٤حد^{٢} + ٥د^{٣}$$

$$١٥ح^{٥}د + ٢١ح^{٤}د^{٢} - ٩ح^{٣}د^{٣}$$

$$- ٢٠ح^{٤}د^{٢} - ٢٨ح^{٣}د^{٣} + ١٢ح^{٢}د^{٤}$$

$$٢٥ح^{٣}د^{٣} + ٣٥ح^{٢}د^{٤} - ١٥حد^{٥}$$

$$١٥ح^{٥}د + ح^{٤}د^{٢} - ١٢ح^{٣}د^{٣} + ٤٧ح^{٢}د^{٤} - ١٥حد^{٥}$$

(في تربيع الكميات البسيطة)

(٣) ينتج مما سبق في (١) انه لتربيع الكميات البسيطة يلزم (اولا) تربيع المكرر (وثانيا) تضعيف الاسس (وثالثا) اعطاء العلامة + للمربع المطلوب مثلا $٤حد^{٢}ه$ فان مربعها $١٦ح^{٤}د^{٧}ه^{٢}$ وكذلك $-٤ح^{٢}د^{٢}ه$ فمربعها $١٦ح^{٤}د^{٢}ه^{٢}$ فاذا لكل مربع جذران احدهما ايجابي والآخر سالبي فيكون

$$\sqrt{١٦ح^{٤}د^{٦}ه^{٢}} = \pm ٤ح^{٢}د^{٣}ه$$

(في تربيع الكميات الثنائية)

(٤) اذا ضربنا ا + ب في نفسه نجد

(الباب الثالث)

(في القسمة)

(١) لقسمة كمية بسيطة على اخرى يلزم اعتبار اربع قواعد (اولها) قاعدة المكررات وهي ان تقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه فما كان هو مكرر الخارج المطلوب (وثانيها) قاعدة الحروف وهي ان تكتب على يسار مكرر الخارج كل حرف المقسوم ان كانت الحروف متشابهة في الكميتين (وثالثها) قاعدة الاسس وهي ان تطرح أس كل حرف في المقسوم عليه من أس الحرف المشابه له في المقسوم (ورابعها) قاعدة العلامات وهي ان كانت الكميتان متحدتي العلامة فعلامة الخارج تكون + والا فتكون — وبعبارة أخرى

+ مقسوم على + أو — مقسوم على — = +

+ مقسوم على — أو — مقسوم على + = —

مثال ذلك ان أريد قسمة ٨ حـ^{٣} د^{٥} على ٢ حـ^{٢} د^{٢} كان الخارج ٤ حـ د^{٣}

(تنبيه) متى كان أس واحد لحرف واحد في كل من المقسوم والمقسوم عليه يمكن محوه منهما أو كتابته في الخارج بالاس صفر اذ قد اصطلحوا على ان كل كمية قوتها صفر تعادل الواحد نحو حـ^{٠} = ١ وسبب ذلك هو ان الخارج من قسمة كمية على نفسها يعادل واحدا فاذن يكون

١٢ حـ^{٥} د^{٣} هـ^{٢} و ÷ ٣ حـ^{٢} د^{٣} هـ = ٤ حـ^{٣} د^{٠} هـ و = ٤ حـ^{٣} × ١ × هـ و = ٤ حـ^{٣} هـ و

(في القسمة المستحيلة)

(٢) استحالة قسمة الكميات البسيطة تكون في ثلاث حالات (الاولى) اذا كان مكرر المقسوم لا يقبل القسمة على مكرر المقسوم عليه (الثانية) اذا كان أس حرف في المقسوم عليه أكبر من أسه في المقسوم (الثالثة) اذا كان في المقسوم عليه حرف لم يوجد في المقسوم وفي هذه الحالات يكون الخارج كسرا

يعني ان حاصل ضرب مجموع كميتين في فاضلهما يعادل تربيع الحد الاول — تربيع الحد الثاني

(تنبيه) للدلالة على ضرب كمية مركبة في كمية بسيطة توضع المركبة بين قوسين هكذا

(ا + ب — ح) ء

فان اريد حذف القوسين لزم ضرب كل من الكميات المحصورة بينهما في الكمية البسيطة فيحدث

ا ء + ب ء — ح ء

وبالعكس اذا وجد حرف مشترك في حدود كمية مركبة يمكن جعله عاملا مشتركا مثال ذلك

ح ء $ه^{٢}$ — ب $ه^{٣}$ + ح $ه^{٤}$

فيمكن كتابتها كذا

(ح ء — ب ه + ح $ه^{٢}$) $ه^{٢}$

واذا كان العاملان كميتين مركبتين يمكن وضعهما كذا

(ا + ب — ح) (ء — ه + و)

(تمرينات)

— $ح^{م-١}$ ء × ٢ $ح^{٣}$ ء = — ٢ $ح^{م+١}$ $ء^{٢}$

($ا^{٢}$ + ا ب + $ب^{٢}$) (ا — ب) = $ا^{٣}$ — $ب^{٣}$

($ا^{٢}$ — ا ب + $ب^{٢}$) (ا + ب) = $ا^{٣}$ + $ب^{٣}$

$(ا + ب)^{٣}$ = $ا^{٣}$ + ٣ $ا^{٢}$ ب + ٣ ا $ب^{٢}$ + $ب^{٣}$

($ا^{٢}$ + ا ب + $ب^{٢}$) ($ا^{٢}$ — ا ب + $ب^{٢}$) ($ا^{٢}$ — $ب^{٢}$) = $ا^{٦}$ — $ب^{٦}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

([illegible])

(٥) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(٦) [illegible]

... المقسوم ... عليه ... اذا ... فائدة ذلك ...

ولاختزال ...

يقسم حدان على ٣ ثم على ح ثم على د ثم على هـ فيحدث

$$\frac{١١\ ح^{٢}\ ...}{١٥\ ح^{٣}\ د^{٢}\ هـ} = \frac{ح^{٤}}{٥\ هـ}$$

(٣) قسمة الكميات المركبة على البسيطة تقسم كل من حدود المركبة على البسيطة مثال ذلك

$$\frac{ح^{٢} + حـ ... - ...}{ح} = ح + هـ ... - و د$$

مثال آخر

$$\frac{ح^{٢} - هـ ... + ر ...}{...} = ح - هـ + و د$$

(٤) القسمة بين ... على ... المركبة الأخرى يلزم ترتيبها بالنسبة الى حرف ... كما تقدم في الضرب ثم يقسم اول حد من المقسوم على اول حد من المقسوم عليه فما كان فهو اول حدود الخارج ثم تضرب حدود المقسوم عليه في هذا الحد ويطرح الحاصل من المقسوم ثم تقسم اول حد من الباقي على اول حد من المقسوم عليه فما ... هو الحد الثاني من الخارج ثم يضرب المقسوم عليه في هذا الحد الثاني ويطرح من المقسوم عليه ويجري العمل على هذا المنوال حتى يبقى صفر ان كان المقسوم قابل القسمة على المقسوم عليه مثال ذلك

١٥ ح^٥ د^٣ + ٧ ح^٥ د^٤ − ٤ ح^٣ د^٧	٥ ح^٣ د + ٤ ح^٢ د^٣
− ١٥ ح^٥ د^٣ − ١٢ ح^٤ د^٥	٣ ح^٢ د^٢ − ح د^٤
− ٥ ح^٤ د^٥ − ٤ ح^٣ د^٧	
+ ٥ ح^٤ د^٥ + ٤ ح^٣ د^٧	
٠	

فنقول

[illegible]

$$-\ ٣\ س^٢ \ldots (س - ١)\ -\ (س\ \ldots\ ١)$$

$$=\ (س - ١)\ [\ ٣\ س - ١ - \ldots\ ]\ =\ (س - ١)(٣\ س - ٣)$$

(٣) في بعض الاحوال يمكن اضافة كمية ثم طرحها من الكمية التي يراد

تحليلها مثال ذلك

$$٣\ س^٢ - ٢\ س + ١ - ١$$

فاذا اضفنا ... وطرحها

$$٣\ س^٢ - ٤\ س + ١ + س$$

ثم نضع في هذه الصورة ثم نطرحه منها فنجد

$$٣\ س^٢ - ٤\ س + ١ + س - ١ =$$

$$٣\ (س^٢ - ٢\ س + ١) + س - ١$$

أو

$$٣\ (س - ١)^٢ + س - ١ = (س - ١)\ \times$$

$$[\ ٣\ (س - ١) + ١\ ] = (س - ١)(٣\ س - ٢)$$

(تمرينات)

$$حـ^٢ د - حـ هـ^٢ ,\ حـ د هـ - حـ د^٢ ,\ (حـ - د)(حـ + د)$$

$$٩\ (س - ص)^٢ - ٤\ س^٢ ,\ (٥\ س - ٣\ ص)\ (س - ٣\ ص)$$

$$حـ + د ,\ هـ - ٣ ,\ حـ^٢ د^٢ - ٢ ,\ حـ^٢ هـ^٢ - (حـ + د + هـ)\ \times$$

$$(حـ + د - هـ)\ (حـ - د + هـ)\ ,\ (حـ - د - هـ)$$

(٣) اذا ... قسمة المقدار ... على ... المشتركة ...

وان جمع الفاضل والمطروح ثانيا ساوى المجموع المطروح منه كان العمل صحيحا وبيان ان نضرب خارج القسمة الحاصل على حدة فان ساوى خارج العمل الآخر كان العمل صحيحا وبيانه هو ان نضرب الخارج في المقسوم عليه فان كان العمل صحيحا لزم ان الحاصل يكون مساويا بالمقسوم

(تمرينات)

١٥ حـ^{٣} د ÷ ٥ حـ^{٤} = ٣ حـ^{٣} د

− ١٨ حـ$^{٣م-ن-١}$ د ÷ ٩ حـ$^{م+ن-١}$ = − ٢ حـ$^{٢-ن}$

١٠ س^{٣} ص^{م} ÷ ٢ س ص = $\frac{\text{ص}^{م}}{\text{ص}}$

(٢١ س^{٤} ص^{٢} − ١٤ س^{٣} ص^{٣} + ٣٥ س^{٢} ص^{٤}) ÷ ٧ س ص = ٣ س^{٣} ص − ٢ س^{٢} ص^{٢} + ٥ س ص^{٣}

(حـ^{٢} − د^{٢} + هـ^{٢} − و^{٢} + ٢ حـ هـ − ٢ د و) ÷ (حـ − د + هـ − و) = حـ + د + هـ + و

(الباب الرابع)

(في الكسور)

(الفصل الاول)

(في الفك والاختزال)

(١) فك كمية مركبة هو تحليلها الى عواملها الاصلية مثاله

حـ د + حـ هـ تنفك الى حـ (د + هـ)

و حـ^{٢} − د^{٢} تنفك الى (حـ + د) (حـ − د)

[illegible]

[illegible]

فبالجمع يكون

[illegible]

وبالجمع

[illegible]

(تمرينات)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(في طرح الكسور)

(٢) اذا كان المطروح والمطروح منه متحدي المقام فبدل علامة المطروح واجعل فاصل البسطين بسطا على المقام المشترك مثاله اذا قيل اطرح $\frac{ب}{د}$ من $\frac{ح}{د}$ فاتخذ العمل هذه الصورة

$$\frac{ح}{د} - \frac{ب}{د} = \frac{ح - ب}{د}$$

وان قيل اطرح $\frac{و}{هـ}$ من $-\frac{ح}{هـ}$ يكون العمل

$$-\frac{ح}{هـ} - \frac{و}{هـ} = \frac{-ح - و}{هـ}$$

(تنبيه) يمكن وضع النتيجة الاخيرة وهي $\frac{-ح-و}{هـ}$ على هذه الصورة

$-\frac{ح+و}{هـ}$ أو على هذه $\frac{-(ح+و)}{هـ}$

$$\frac{\text{ح د}^2}{\text{ح هـ}} = \frac{\text{د}^2}{\text{هـ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{٦ هـ}}{\text{٤ ح هـ}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢ ح}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ح}^2 + \text{ح د}}{\text{ح} + \text{ح د}} = \frac{\text{ح} + \text{د}}{\text{١} + \text{د}}$$

ويسهل ايجاد القواسم المشتركة بفك كل من البسط والمقام مثال ذلك

$$\frac{(\text{ح} + \text{١})^2 - \text{ح}^2}{\text{٦ ح}^2 + \text{٣ ح}} = \frac{\text{٢ ح} + \text{١}}{\text{٣ ح} (\text{٢ ح} + \text{١})} = \frac{\text{١}}{\text{٣ ح}}$$

مثال آخر

$$\frac{\left(\frac{\text{ح} + \text{د}}{\text{٢}}\right)^2 - \left(\frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{٢}}\right)^2}{\text{ح} + \text{ح د}} = \frac{\text{ح د}}{\text{ح} (\text{١} + \text{د})} = \frac{\text{د}}{\text{١} + \text{د}}$$

(تمرينات)

$$\frac{\text{ح}^2 - \text{د}^2}{\text{ح}^2 + \text{ح د}} = \frac{\text{ح} - \text{د}}{\text{ح}}$$

$$\frac{\text{س}^2 + (\text{ح} + \text{د}) \text{س} + \text{ح د}}{(\text{س} + \text{ح})^2} = \frac{\text{س} + \text{د}}{\text{س} + \text{ح}}$$

$$\frac{\text{س}^2 - \text{٥ س} - \text{٦}}{\text{س}^3 - \text{٩ س}^2 + \text{٢٦ س} - \text{٢٤}} = \frac{\text{١}}{\text{س} - \text{٤}}$$

(الفصل الرابع)

(في جمع الكسور)

(١) اذا كانت الكسور متحدة المقام فاجمع البسوط واجعل المجموع بسطا على المقام المشترك مثاله

$$\frac{\text{ا}}{\text{هـ}} - \frac{\text{ح}}{\text{هـ}} + \frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ا} - \text{ح} + \text{د}}{\text{هـ}}$$

(تمرينات)

$$\frac{١٦ ا^٤ ب^٣ ح^٥}{٥ س^٢ ص} \div ٨ ح^٣ ء = \frac{٢ ح^٢ ء}{٥ س^٢ ص ح}$$

$$\frac{٥ س^٢ ص^٣}{س^٢ - ص^٢} \div \frac{س - ص^٣}{٣ س - ٣ ص} = \frac{س^٢}{ص^٢ (٣ س - ص)}$$

$$\frac{ح د + ٤ ء د}{ح ء - ٣ ء} \div \frac{ح د - ٣ هـ^٢}{ح - ء} = \frac{ح^٣}{هـ^٣}$$

(الباب الرابع)

(في المعادلات ذات الدرجة الاولى)

(١) المعادلة عبارة جبرية تدل على المساواة بين كميتين محتويتين على أجزاء معلومة وأخرى مجهولة نحو

$$٤ س - ٢٣ = س + ١$$

فالكمية التي عن يمين العلامة = تسمى الطرف الاول والتي عن يسارها الطرف الثاني

حل معادلة هو تحويلها من صورة الى أخرى لاستخراج الكمية المجهولة وهذا التحويل مبني على انه لا تتغير المعادلة اذا أضيف وطرح من طرفيها كميات متساوية وكذلك اذا ضربا وقسما على كميات متساوية وينتج من هذا

(أولا) انه يمكن نقل كمية من طرف الى آخر بتبديل علامتها مثاله

$$س - ب = ح$$

لاننا اذا أضفنا الى الطرفين الكمية ب يحصل

$$س = ح + ب$$

(وثانيا) انه يمكن تغيير علامات كل الحدود في الطرفين مثاله

فيعلم من هنا انه اذا كانت العلامة — امام كسر فيمكنك حذفها بشرط ان تغير علامات الكميات التى فى البسط

(٢) وأما اذا كانت الكسور مختلفة المقام فابتدئ بتجنيسها واجر العمل حسبما ذكر مثاله

$$\frac{\text{ا}}{\text{حـ}} - \frac{\text{ء}}{\text{هـ}} \quad \text{فبالتجنيس والجمع} \quad \frac{\text{ا هـ} - \text{حـ ء}}{\text{حـ هـ}}$$

(فى ضرب الكسور)

(٣) يضرب البسط فى البسط والمقام فى المقام حسبما سبق فى الحساب ثم يختزل الحاصل ان أمكن ذلك مثاله

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب هـ}} \times \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{ا حـ هـ}}{\text{ب و هـ}} = \frac{\text{ا حـ}}{\text{ب ء}}$$

(تمرينات)

$$\frac{\text{٣ س صـ}}{\text{٨ حـ}^{٢}\,\text{ء}^{٣}} \times \text{٤ حـ}^{٣}\,\text{ء} = \frac{\text{٣ س صـ}}{\text{٢ ء}^{٢}}$$

$$\frac{\text{حـ}^{٢} - \text{٤ س}^{٢}}{\text{حـ} + \text{س}} \times \frac{\text{حـ} + \text{س}}{\text{حـ} - \text{٢ س}} = \text{حـ} + \text{٢ س}$$

$$\frac{\text{حـ} + \text{ء}}{\text{حـ} - \text{ء}} \times \frac{\text{حـ} - \text{هـ}}{\text{حـ} + \text{هـ}} \times \frac{\text{حـ}^{٢} - \text{ء}^{٢}}{\text{حـ}^{٢} - \text{هـ}^{٢}} = \left(\frac{\text{حـ} + \text{ء}}{\text{حـ} + \text{هـ}}\right)^{٢}$$

(فى قسمة الكسور)

(٤) لقسمة كسر على كسر آخر يضرب بسط المقسوم فى مقام المقسوم عليه ومقامه فى بسطه كما مر فى الحساب ومثال ذلك

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} \div \frac{\text{هـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{ا ء}}{\text{ب حـ}}$$

مثال آخر

$$\frac{\text{١٨ حـ}^{٣}\,\text{ء}^{٢}}{\text{٣٥ هـ}^{٢}\,\text{و}^{٢}} \div \frac{\text{٣ حـ ء}^{٢}}{\text{٧ هـ}^{٢}\,\text{و}} = \frac{\text{٦ حـ}^{٢}}{\text{٥ و}}$$

(تمرينات)

(فى الميزان)

…مل فيها المجهول بقيمته فان … كان الطرفان

…ففاسدا فاذا وضعنا فى المثال الاول ٢ عوضا

١٥ + ٢ × ٢ = ٧ ·

١ = ١٩ فالعمل صحيح

(…ت الدرجة الاولى وجملة مجاهيل)

…شترط ان يكون عددها كعدد المعادلات المحتوية

…ثنين لزم معادلتان واذا كان المراد ايجاد ثلاثة

…خرا

…على الحذف وهو عملية الغرض منها اخراج

…المعادلات وللحذف ثلاث طرق وهى المقارنة

(…الحذف بالمقارنة)

…مجهولين

… ٣ ص = ٨

+ ٢ ص = ٣٣

مثلا فلنا

س — ب = حـ

لانا اذا ضربنا الطرفين فى — ١ يحدث

— س + ب = — حـ

(فى حل المعادلة ذات الدرجة الاولى والمجهول الواحد)

(٢) المعادلة ذات الدرجة الاولى هى التى لا تحتوى على المجهول الا بدرجة أولى فلحلها يلزم نقل الحدود المجهولة فى الطرف الاول والمعلومة فى الطرف الثانى (وهذا العمل يسمى بالمقابلة) ثم بعد اختصار الحدود المتشابهة يقسم الطرفان على مكرر المجهول

لنفرض المعادلة ١٣ س — ٧ = ٢ س + ١٥

فبالمقابلة ١٣ س — ٢ س = ١٥ + ٧

وبالاختصار ١١ س = ٢٢

وبالقسمة س = ٢

واذا كان فى المعادلة كسور ينبغى تحويل كل الحدود الى مقام مشترك ثم حذفه منها (وهذا العمل يسمى بالجبر) مثاله

٥/٣ س — ٤ = ١٠ — ٢/٧ س

فبالتحويل الى مقام مشترك يحدث

٣٥/٢١ س — ٨٤/٢١ = ٢١٠/٢١ — ٦/٢١ س

وبالجبر

٣٥ س — ٨٤ = ٢١٠ — ٦ س

وبالمقابلة ٣٥ س + ٦ س = ٢١٠ + ٨٤

وبالاختصار ٤١ س = ٢٩٤

وبالقسمة س = ٢٩٤/٤١ = ٧/٤١ ٧

مثال

[illegible]

٧ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

٤ س − ٣ ص = ٨

٥ س + ٢ ص = ٣٣

[illegible] — نضرب المعادلة الاولى في ٥ والثانية في ٤ فلها

٢٠ س − ١٥ ص = ٤٠

٢٠ س + ٨ ص = ٣٢١

ثم نطرح الاولى من الثانية فنحصل

٨ ص + ١٥ ص = ١٣٢ — ٤٠

وبالاختصار والقسمة ص = ٤

وان أردنا حذف ص ضربت المعادلة الاولى في ٢ والثانية في ٣

ثم جمعناهما

(قاعدة عامة)

(٨) [illegible] المعادلات عددها ن يحذف احد المجاهيل من الاولى مع كل واحدة من الاخرى فتبقى معادلات عددها ن — ١ ثم يحذف مجهول ثان من احداها مع كل من الاخرى فتبقى معادلات عددها ن — ٢ وهكذا الى ان تؤول الى معادلة ذات مجهول واحد فيستخرج منها مقداره فيوضع في احدى المعادلتين الحاويتين لذلك المجهول ومجهول آخر فيعلم المجهول الثاني ثم يوضع مقدارا هذين المجهولين في المعادلات الحاوية لهما وعلى مجهول ثالث فيعلم المجهول الثالث وهكذا الى ان تعين كل المجاهيل

$$\text{س} = \frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}$$

$$\text{س} = \frac{٣٣ - ٢\,\text{ص}}{٥}$$

ومن البديهى ان الشيئين المتساويين لشىء واحد فهما متساويان فلنا

$$\frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤} = \frac{٣٣ - ٢\,\text{ص}}{٥}$$

وبالجبر $٤٠ + ١٥\,\text{ص} = ١٣٢ - ٨\,\text{ص}$

وبالمقابلة $١٥\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ١٣١ - ٤٠$

وبالاختصار $٢٣\,\text{ص} = ٩٢$

وبالقسمة $\text{ص} = ٤$

وللحصول على س نضع مقدار ص فى احدى المعادلتين المفروضتين فنجد $\text{س} = ٥$

(فى الحذف بالوضع)

(٦) يؤخذ من احدى المعادلتين مقدار أحد المجهولين ويوضع فى الاخرى لنفرض المعادلتين السابقتين فنأخذ من الاولى مثلا

$$\text{س} = \frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}$$

ثم نضع هذا المقدار فى الثانية فيحدث

$$٥\left(\frac{٨ + ٣\,\text{ص}}{٤}\right) + ٢\,\text{ص} = ٣٣$$

وبالجبر $٤٠ + ١٥\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ١٣٢$

وبالمقابلة $١٧\,\text{ص} + ٨\,\text{ص} = ٣٢١ - ٤٠$

وبالاختصار $٢٣\,\text{ص} = ٩٢$

وبالقسمة $\text{ص} = ٤$

وبوضع هذا المقدار فى احدى المعادلتين المفروضتين نجد $\text{س} = ٥$ كما تقدم

[illegible]

[illegible] ٤١٦ [illegible]

[illegible] ٩ [illegible]

[illegible] ٣ [illegible] ٢٧

[illegible] ٧

[illegible] ١٠٠ [illegible]

[illegible] ١٠٠ [illegible] ١٠ [illegible]

[illegible] ١٠٠ [illegible] العددين تكون [illegible]

[illegible] المعادلة

[illegible] ١ [illegible] ١٠٠

[illegible] المعادلة الاخرى

[illegible] ١٠٠ [illegible] ٢ [illegible] ١٠٠

[illegible] ٥٠٠ [illegible] ٧٠٠ [illegible]

[illegible] المتادر

[illegible]

[illegible]

[illegible] المسائل

[illegible] على ان [illegible] الرابع [illegible]

[illegible] الحل [illegible] الارقام [illegible] على شروط

[illegible] الجاهل

فنفرض مثلا المعادلات الثلاث

س + ص + ط = ٦

٢ س − ص + ط = ٣

س + ٢ ص − ط = ٢

فنطرح الثانية من الاولى فيحصل

− س + ٢ ص = ٣

ثم نجمع الاولى والثالثة فيحصل

٢ س + ٣ ص = ٨

فحل هاتين المعادلتين نجد س = ١ و ص = ٢ وبالتعويض فى احدى المعادلات المفروضة نجد ط = ٣

(تنبيه) قد فرضنا فى الامثلة السابقة ان نتبع الطريقة التى ذكرناها فى كل المعادلات فلا فرق بين العمل ان كان الامر خلاف ذلك غير انه يلزم لا... ان ... الطريق الذى يؤدى به للتوصل الى المطلوب اكثر سرعة مثال ذلك

(١) س + ص = ٦

(٢) − س + ط = ٤

(٣) س + ص + ط = ١٢

فبطرح (١) من (٣) نجد ط = ٦ وبوضع هذا المقدار فى (٢) س = ٢ وبالتعويض فى (١) ص = ٤

(مسائل محلولة)

(الاول) ما العدد اللازم ضمه الى ٨ ليكون المجموع ١٤

نرمز بالحرف س للعدد المجهول فاذا ضممناه الى ٨ هكذا س + ٨ فينبغى ان هذا المجموع يعادل ١٤ فاذا المعادلة

س + ٨ = ١٤ ومنها س = ٦ وهو الجواب

(الثانية)

$$\sqrt{١٣ ح ٢ ٤} = \pm ح ٤ \sqrt{١٣} ٤$$

ويستدل من ذلك ان كل جذر عمروباقي كما من اجل ايجاد العلاقة بعد تعيينها امثال

$$\sqrt{ح}\ ح هـ = \sqrt{ح^٣ هـ}$$

وينتج أيضا مما قلناه في الباب المذكور ان مربع كمية ثنائية يحتوي مربع الكمية الاولى + مربع الثانية + ٢ × حاصل ضرب الاثنين على حسب كون الكمية الثانية ... مثل ا + ب او ا − ب

(تنبيه) الطريقة التي نستعملها في حساب الاستخراج ... مبنية على هذه القاعدة

امرينات

$$\sqrt{١٢١ ح^٨ ٤^٤ هـ^٢} = \pm ١١ ح^٤ ٤^٢ هـ$$

$$\frac{١}{٤}\sqrt{\frac{٢٥}{٦٤} ح^٢ ٤^٢} = \frac{٥ ح ٤}{٣٢}$$

$$\sqrt{٩ ح^{٣٣} ٤^{٢٢} - ...} = \pm ٣ ح ٤ ...$$

(في حل المعادلة ذات الدرجة الثانية)

(٢) المعادلة ذات الدرجة الثانية هي التي تحتوي على مجهول أس الاكبر يعادل ٢ وتنقسم الى معادلة تامة ومعادلة غير تامة فالاولى هي التي تحتوي على المجهول بدرجة ثانية فقط نحو س^٢ = ٩ واما الثانية فهي المحتوية على المجهول بدرجة اولى وثانية نحو س^٢ − ٣ س − ٢ = ٠

(في المعادلة التامة)

(مسائل منثورة)

(١) مجموع ربع ما عندى وخمسه يعادل فرنكين وربع فرنك فكم عندى

(الجواب) ٥ فرنكات

(٢) اقسم ٢٣٧ فرنك ما بين زيد وعمرو بحيث يكون نصيب الاول ربع نصيب الآخر

(الجواب) ٤٧,٤ و ١٨٩,٦

(٣) ما العددان اللذان مجموعهما ٧٠ وفاضلهما ١٦

(الجواب) ٤٣ و ٢٧

(٤) رجل اشترى من البرتقال والليمون باثنين وعشرين قرشا بسعر كل أربع برتقالات بقرش واحد وكل خمس ليمونات بقرش أيضا ثم باع نصف البرتقال وثلث الليمون بسعر ما اشترى به فبلغ الثمن ١٣ قرشا فكم اشترى من كل صنف

(الجواب) ٤٠ برتقالة و ٦٠ ليمونة

(الباب الخامس)

(فى التجذير)

(١) قد ذكرنا فى الباب الثانى انه لتجذير الكميات البسيطة يجب تجذير مكررها ثم تنصيف أسس الحروف الداخلة فيها نحو

$$\sqrt{٤٩\,ح^{٤}\,ء^{٢}\,ه^{٦}} = \pm\,٩\,ح^{٢}\,ء\,ه^{٣}$$

فاذا كان المكرر ليس بمربع تام أو ان كان أحد الاسس عددا فرديا كان التجذير مستحيلا ففى هذه الحالة يلزم اخراج الحروف ذات الاسس الزوجية وابقاء الاخرى تحت العلامة مثاله

$$\sqrt{١٦\,ح^{٣}\,ء^{٢}} = \pm\,٤\,ح\,ء\,\sqrt{ح}$$

مثال آخر

أي يكون

$$س^2 + ط س + \left(\frac{ط}{٢}\right)^2 = \left(\frac{ط}{٢}\right)^2 - ع$$

أو

$$\left(س + \frac{ط}{٢}\right)^2 = \frac{ط^2}{٤} - ع$$

وبالجذر

$$س + \frac{ط}{٢} = \pm\sqrt{\frac{ط^2}{٤} - ع}$$

وبالنقل

$$س = -\frac{ط}{٢} \pm \sqrt{\frac{ط^2}{٤} - ع} \qquad (١)$$

وهو القانون الذي يحل به جميع المعادلات ذات الدرجة الثانية ذات المجهول الواحد

(تنبيه) للحل المذكور ثلاث حالات اما ان يكون

$$\frac{ط^2}{٤} > ع \quad \text{او} \quad \frac{ط^2}{٤} = ع \quad \text{او} \quad \frac{ط^2}{٤} < ع$$

ففي الحالة الاولى تكون الكمية موجبة وللمعادلة جوابان موجبان مختلفان وفي الثانية تكون الكمية المذكورة صفرا فللمعادلة جواب واحد وفي الحالة الثالثة تكون $\frac{ط^2}{٤} - ع$ سالبة وحيث ان الكميات السالبة لا جذر لها فالمعادلة حينئذ تخيلية اذ لا وجود لها

(تطبيق) لتكن المعادلة المفروضة هنا

$$س^2 - ٣ س + ٢ = ٠$$

فبالتعويض في القانون (١) ط = −٣ و ع = ٢ فنجد

$$س = \frac{٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤} - ٢}$$

ومنها

$$س = \frac{٣}{٢} \pm \frac{١}{٢}$$

وبأخذ العلامة العليا يكون احد الجوابين $س' = ٢$ وبأخذ العلامة السفلى يكون الجواب الآخر $س'' = ١$

(مسائل محلولة)

(الاولى) ما العدد الذي اذا ضرب نصفه في ثلثه يحصل ٨٦٤

(٣) لتكن المعادلة $س^{٢} = ح$ فالحل بجذر طرفيها ينتج $س = \pm \sqrt{ح}$ أعني ان المعادلة المفروضة حلان هما $س = + \sqrt{ح}$ و $س = - \sqrt{ح}$ ويسميان جوابي المعادلة

(تطبيق) ما العدد الذي اذا أضيف اليه ١٥ وطرح منها فكان حاصل ضرب الناتجين ٣٠٠

لتكن س العدد المجهول فالمحسوب المطلوق

$$(١٥ + س)(١٥ - س) = ٣٠٠$$

فبالضرب $٢٢٥ - س^{٢} = ٣٠٠$

وبتغيير العلامات وبالمقابلة $س^{٢} = ٢٥$

وبالتجذير $س = \pm ٥$ وهو الجواب

(في المعادلة الممتزجة)

(٤) كل معادلة ممتزجة من الدرجة الثانية يمكن تحويلها الى هذه الصورة

$$ب س^{٢} + ح س + ى = ٠$$

المفروض فيها ان ب و ح و ى كميات موجبة او سالبة فاذا قسمنا الطرفين على ب يخرج

$$س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{ى}{ب} = ٠$$

لنضع للاختصار $\frac{ح}{ب} = ط$ و $\frac{ى}{ب} = ع$ فتصير

$$س^{٢} + ط س + ع = ٠$$

$$س^{٢} + ط س = - ع$$

وباضافة الكمية $\left(\frac{ط}{٢}\right)^{٢}$ الى الطرفين لاتمام التربيع في الطرف

فنأخذ من الأولى

$$\text{ص} = \text{ح} - \text{س}$$

ونضع هذا المقدار في الثانية فتصير

$$\text{س}^{٢} - \text{ح}\,\text{س} + \text{د} = ٠$$

ومنها

$$\text{س} = \frac{\text{ح} + \sqrt{\text{ح}^{٢} - ٤\,\text{د}}}{٢}$$

$$\text{س}' = \frac{\text{ح} - \sqrt{\text{ح}^{٢} - ٤\,\text{د}}}{٢}$$

(مسائل منثورة)

(١) ما العدد الذي ثلث الحاصل من ضرب ثمنه في سبعة $\frac{٢}{٣}$ ٢٩٨

(الجواب) ٢١٤

(٢) ما العدد الذي اذا طرح منه نصف جزره يكون الفاضل $\frac{١}{٢}$ ٦

(الجواب) ٩

(٣) سئل رجل عن عمره فقال حين ولادتي كان عمر أبي ٢٠ سنة والآن مجموع عمرينا أقل من حاصل ضربهما بعدد سنين ٢٥٠٠ فما عمره

(الجواب) ٤٢ سنة

(الباب السادس)

(في المتواليات)

(١) المتواليات نوعان فاضلية وقسمية أما الفاضلية فهي ما تكونت من حدود متعددة بحيث الفاضل بين كل حدين متواليين لا يتغير ويسمى هذا الفاضل أساسها ومثالها هذه الاعداد

٢ , ٤ , ٦ , ٨ , ١٠ , ١٢

فتتركب منها متوالية فاضلية أساسها ٢ وتكتب كذا

ليكن س المجهول فلنا المعادلة

$$\frac{س}{٣} \times \frac{س}{٣} = ٨٦٤$$

فبالضرب والجبر $س^{٢} = ٥١٨٤$

وبالتجذير $س = \pm ٧٢$

(الثانية) ما العدد الذى اذا أضيف الى جذره التربيعى يكون المجموع ٦٠٠

لنرمز بالحرف س للمجهول فلنا

$$س + \sqrt{س} = ٦٠٠$$

فلاجل حل هذه المعادلة يجب حذف علامة ابانذر ولذا نقابل الحد س فتصير

$$\sqrt{س} = ٦٠٠ - س$$

ثم نرقى الطرفين الى القوة الثانية فيحصل

$$س = ٣٦٠٠٠٠ - ١٢٠٠ س + س^{٢}$$

وبالمقابلة $س^{٢} - ١٢٠١ س + ٣٦٠٠٠٠ = ٠$

وبجعل ط = − ١٢٠١ وع = ٣٦٠٠٠٠ فى القانون (١) يحدث

$$س = \frac{١٢٠١}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٢٠١^{٢}}{٤} - ٣٦٠٠٠٠} = \frac{١٢٠١}{٢} \pm \frac{٤٩}{٢}$$

ومنها $س' = ٥٧٦$ و $س'' = ٦٢٥$ فالجواب ٥٧٦ لانا اذا اضفنا

اليه جذره وهو ٢٤ يحصل ٦٠٠

(تنبيه) العدد ٦٢٥ جواب أيضا لان $س + \sqrt{س}$ معناه فى علم الجبر س

+ ($\pm \sqrt{س}$) فاذا طرحت من ٦٢٥ جذره وهو ٢٥ يحصل أيضا

٦٠٠

(الثالثة) ما عددان مجموعهما ح وحاصل ضربهما ء

لنا $س + ص = ح$

$$س ص = ء$$

أي أن الحد يعادل الحد الاول مضافاً اليه الحاصل من ضرب عدد الحدود الا واحداً في الفرق ومن ذلك يكون الحد الاخير

م = ب + (ن − ١) ف (١)

فاذا علمت ثلاث من الكميات م و ب و ن و ف استخرج رابعة بحل هذه المعادلة بالنسبة اليها مثلاً

ما عدد حدود المتوالية التفاضلية التي أساسها ٣ وحدها الاول ٢ والاخير ٢٣

فنضع هذه المقادير في المعادلة (١) فيحدث

٢٣ = ٢ + (ن − ١) ٣

ومنها ن = ٨

وفي الحقيقة المتوالية هي

÷ ٢ . ٥ . ٨ . ١١ . ١٤ . ١٧ . ٢٠ . ٢٣

ويعلم من القانون (١) أن مجموع كل حدين كائنين على بعد واحد من أحد الطرفين (١) يعادل مجموع هذين الطرفين لتكن مثلاً المتوالية

÷ ب . ح . ء . هـ . . . ل . ع

فلما ح = ب + ف و ع = ل + ف

ومن هذه ل = ع − ف وبضمها الى الاولى يحصل

ح + ل = ب + ع

وقس على ذلك

والبحث الآن عن مجموع الحدود المتوالية التفاضلية نضع لاجل الاختصار

ع = ب + ح + ... + ل + م

أو كما هو ظاهر ع = م + ل + ... + ح + ب

(١) نعني بالطرفين الحد الاول والحد الاخير

÷ ٢ . ٤ . ٦ . ٨ . ١٠ . ١٢

إذا كان الاساس موجبا كما في مثالنا تسمى المتوالية تصاعدية وان كان سالبا سمي تنازلية كهذه

÷ ١٢ . ١٠ . ٨ . ٦ . ٤ . ٢

لان أساسها — ٢

أما المتوالية القسمية فهي ما تكونت من حدود بحيث اذا قسم كل منها على الذي قبله يكون الخارج عددا واحدا وهذا الخارج يسمى أساسها ومثالها هذه الاعداد

١ , ٣ , ٩ , ٢٧ , ٨١ , ٢٤٣

تتركب منها متوالية قسمية أساسها ٣ وتكتب كذا

∺ ١ : ٣ : ٩ : ٢٧ : ٨١ : ٢٤٣

واذا كان الاساس أكبر من الواحد تسمى المتوالية تصاعدية كما في مثالنا وان كان أصغر منه سميت تنازلية كهذه

∺ ٢٤٣ : ٨١ : ٢٧ : ٩ : ٣ : ١

(في المتوالية الفاضلية)

(٢) لنفرض المتوالية

÷ ب . حـ . د . هـ ..... الخ ..... ل . م

التي عدد حدودها ن وأساسها س فلنا بمقتضى التعريف السابق

حـ = ب + س , د = حـ + س , هـ = د + س

, ... , م = ل + س

فبوضع مقدار حـ في المعادلة الثانية يحدث د = ب + ٢ س

وبوضع هذا المقدار في الثالثة تصير هـ = ب + ٣ س فيرى بالقياس

فينتج من ذلك انه يمكن وضع المتوالية المفروضة على هذه الصورة

$$∴ ب : ب س : ب س^{٢} : \ldots\ldots : ب س^{ن-٢} : ب س^{ن-١}$$

ويتضح من هنا ان حاصل ضرب كل حدين كائنين على بعدين متساويين من الطرفين هو كحاصل ضرب هذين الطرفين مثاله

$$ب س × ب س^{ن-٢} = ب × ب س^{ن-١} .$$

ولنبحث عن مجموع الحدود فنجعل

$$ج = ب + ب س + ب س^{٢} + \ldots + ب س^{ن-٢} + ب س^{ن-٢}$$

فاذا ضربنا الطرفين فى الاساس $س$ لنا

$$ج س = ب س + ب س^{٢} + ب س^{٣} + \ldots + ب س^{ن-١} + ب س^{ن}$$

وبطرح الاولى من الثانية يفضل بعد مجموع الحدود المتشابهة

$$ج س - ج = ب س^{ن} - ب$$

ومنها $$ج = \frac{ب س^{ن} - ب}{س - ١}$$

وبوضع $م$ عوضا عن $ب س^{ن}$ لنا

$$ج = \frac{م س - ب}{س - ١}$$ وهو المطلوب

لنبحث مثلا عن مجموع حدود المتوالية

$$∴ ١ : ٣ : ٩ : ٢٧ \cdot\cdot ٨١ : ٢١٣$$

فنجعل فى القانون الاخير $ب = ١$ و $م = ٢١$ و $س = ٣$ فنجد

$$ج = ٣١٩$$

(تمرينات)

ثم نجمع هاتين المعادلتين فيحصل

٢ ج = (ب + م) + (ح + ل) + ... +
(ل + ح) + (م + ب)

وبما تقدم كل من هذه الكميات الثنائية تعادل مجموع الطرفين ب + م فاذا كان عدد الحدود ن تصير هذه المعادلة

٢ ج = (ب + م) ن

وبالقسمة

ج = (ب + م) $\frac{\text{ن}}{٢}$ (٢) وهو المطلوب

لنبحث مثلا عن مجموع حدود المتوالية المذكورة فى المثال السابق فنجعل فى القانون (٢)

ب = ٢ و م = ٢٣ و ن = ٨

فنجد ٣ + ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ٢٠ + ٢٣ = ج = ١٠٠

(فى المتوالية القسمية)

(٣) لنفرض المتوالية القسمية

∵ ب : ح : ء : هـ : .... : ل : م

التى عدد حدودها ن وأساسها س فينتج من التعريف ان

ح = ب س و ء = ح س ، هـ = ء س .... و م = ل س

فبوضع مقدار ح فى المعادلة الثانية تصير ء = ب س^{٢} وبوضع هذا المقدار فى الثالثة يحدث هـ = ب س^{٣} فيرى بالقياس ان أى حد يعادل الحد الاول مضروبا فى الاساس المرفوع لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له فالحد الاخير يكون حينئذ

م = ب س$^{\text{ن} - ١}$

فينتج

(١) ما الحد الخامس عشر من المتوالية الفاضلية

÷ ٢ . ٦ . ١٢ ....

(الجواب) ٧٢

(٢) ما الحد الثانى والاربعين من المتوالية

÷ = — ١٢ $\frac{1}{2}$. — ١٠ . — ٧ $\frac{1}{2}$ ......

وما مجموع خمسين من حدودها

(الجواب) ٩٠ و ج = ٢٤٣٧ $\frac{1}{2}$

(٣) ما عدد حدود المتوالية التى طرفها الاول ٢ $\frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{2}$ ومجموع حدودها ١٩٠٠

(الجواب) ١٠٠

(٤) متوالية قسمية عدد حدودها ١٠ وحاصل ضرب الطرفين ١٢٥ والحد الخامس يعادل الاساس فماهى

(الجواب) ∺ $\frac{1}{125}$: $\frac{1}{25}$: $\frac{1}{5}$: ١ : ٥ : ٢٥ : ١٢٥ : ٣٢٥ : ٣١٢٥ : ١٥٣٢٦

تم علم الجبر ويليه علم الهندسة